

مقدمه مدیر گروه

سرعت ... شتاب ... مینیمال شدن ...
اینها شاخصه‌های دنیای امروزند. در این دنیای پرسرعت،
گاهی لازم است ما هم با قطار زمان همراه شویم.
این کتاب، یک گردآوری و جمع‌بندی هوشمندانه،
سریع، مختصر و مناسب برای دانش‌آموزان کوشای پایه
نهم است. از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به کوچک
بودن، طبقه‌بندی آگاهانه و بیان همه نکات مهم
و کلیدی نهم در کمترین فضای ممکن اشاره کرد.
کتاب‌های لقمه گروه ریاضی پایه نهم در دو جلد **حساب**
و **هندسه** تألیف شده‌اند که در این حرکت پرشتاب،
مکمل و همراه شما هستند.

و اما در این کتاب چه می‌بینید؟

نمایشگر سرفصل‌های اصلی کتاب که شامل



تعدادی  هستند.

بیانگر بخش‌های اصلی هر سرفصل که بنابر مفاهیم



مشترک، چند  در آنها قرار گرفته است.




هریک از اینها یک نکته از ۱۰۰ نکته اصلی کتاب است که در آن به آموزش همراه با مثال پرداخته ایم.

در هر  چه خبر است؟

● زیرنکته

📍 **نکته تر** به عنوان زیرنکته مهم تر

💎 مثال

 تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای با چیدمان آسان به دشوار که در پاسخ‌نامه انتهای کتاب، پاسخ تشریحی آنها را آورده ایم. کتاب‌های **لقمه** را می‌توانید هنگام لقمه گرفتن، در سرویس مدرسه، در مترو و اتوبوس، در زنگ‌های تفریح و هر جای دیگری همراه داشته باشید و به اندازه وقتتان از آنها استفاده کنید. و اما مؤلفان این کتاب، دو دوست، دو یار، دو مکمل و دو متمم! نیما و حامد عزیز هر دو استثنایی‌اند؛ شگفتا که این کتاب دوگانه‌ای است که در آن دویی نیست.

به یقین، تجربه و ذوق تألیف هر دو بزرگوار به سینرژی منجر شده است که از جمع جبری توانمندی هر یک بیشتر است. امید که شما هم از کتاب لذت ببرید.

خلاصه: ما فیل هوا کردیم! هرچی نکته حساب تو نهمه، یه کتاب کردیم! (بقیه‌اش را می‌تونید پشت جلد کتاب بخونید!)

قربون صفاتون

بهنام بناپور

مقدمه مؤلفان

پس از هزارویک شب (!) بالاخره توفیق حاصل شد و نگارش و آماده‌سازی این لقمه کوچک به سرانجام رسید. به قول محسن تنابنده نازنین: «جوجه داد»!

همه چیز ملانصرالدینی شروع شد!

آخه میگن یه بنده خدایی دهان دره می‌کرد؛ ملاً گفت: «حالا که دهانت باز است، حسن آقا را هم صدا کن بیاد.» حالا شده حکایت ما! سرمون تو لاک خودمون بود و یکیمون تنوری و استعداد تحصیلی می‌نوشت و اون یکی کارآموز و استعداد تحلیلی؛ اومدن گفتن: «شما که دارید می‌نویسید، بشینید یه لقمه با هم بزنید!» این یعنی شروع یه داستان تکراری! نوشتن کتاب و بارها عبور از ذوق سخت‌گیر خانم قراچلو و تیم دوست‌داشتنی مهروماه...

این یعنی شروع دوباره جنگ نرم! رابطه ما با مهروماه مصداق جنگ نرمه! یعنی دو نفر سر اینکه کدوم اون یکی رو بیشتر دوست داره، به جان هم افتاده‌اند. نمی‌دونم مهروماه ما رو خیلی دوست داره یا ما مهروماه رو! مهروماهی بودن خوبه، قشنگه، هر وقت بهش فکر کنی یه لبخند آبی روی صورتت ظاهر میشه، اما ترس داره! ترس زیر ذره‌بین بودن همه کارهایت، ترس ضعیف کار کردن پیش روی استاد، اون هم از نوع بناپورش! ترس نبودن پیش اون همه مهربونی! این کتاب را دوست داریم به خاطر دسته‌بندی موضوعی دقیقش؛ یک طبقه‌بندی از جنس کتاب درسی که امکان مطالعه آن را بر اساس موضوعات کتاب درسی فراهم می‌کند. کلیدها و نکات

درونش همه مطالب حساب نهم را با تأکید بر فهم مطالب بدون نیاز به حفظ آن در ذهن شما حل می‌کند. (یادت نره که فرق زیادی بین حل شدن و تهنشین شدن!)

نمونه سؤال‌های آزمون‌های مختلف و شبیه‌سازی این سؤال‌ها در قالب سؤال‌های جدید، آخرین حربه ما برای خاص کردن همین لقمه کوچک بود... لقمه‌ای کوچک ولی سرشار از انرژی و روحیه برای جمع‌بندی همه آموخته‌هایت در روزهای نزدیک امتحانات و آزمون‌ها.

در انتها باید گفت که تألیف این کتاب تنها با سرمایه عشق مؤلفان به شما دانش‌آموزان تحقق یافت. بی‌تردید، هستند کسانی که می‌دانند در زمان تألیف این اثر بر ما چه گذشت و در چه شرایطی بودیم؛ اما ما رسالتی جز پیمودن این مسیر برای تجربه مجدد همان لبخند آبی نداشتیم. این را می‌دانیم که اثر علمی جایگاه درد دل نیست، اما از بیان احساسمان به مهر و ماه و انگیزه‌های نیروبخش انسان‌های شریفش در تداوم راه معلمی و پیمانی که با خدای خود بسته‌ایم گریزی نبود؛ پس در همین حد بسنده کنیم که زمان، اندک و سخن‌های ناگفته و نانوشته در ثنای این مهربانان بسیار است و امروز در یکی از بهشتی‌ترین روزهای اردیبهشت با قبول هر گونه خطایی که هر انسانی می‌تواند داشته باشد، دیدگاه‌های ارزشمند شما را در خصوص این کتاب بردیده‌منت می‌نهمیم؛ نشانی الکترونیکی گروه ریاضی riazi@mehromah.ir و سامانه پیامکی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ به همین منظور در اختیار شما خوبان قرار دارد.

نیبا نامآوری - حامد فرضعلی‌بیک





فهرست

فصل اوّل: مجموعه‌ها



۱۲

شناخت مجموعه



۲۳

زیرمجموعه



۳۳

اعمال بین مجموعه‌ها



۴۶

احتمال در مجموعه‌ها



فصل دوم: عددهای حقیقی



۶۰

مفاهیم اولیه عددهای گویا



۸۰

نمایش اعشاری عددهای گویا



۸۹

عددهای گنگ



۱۰۲

قدر مطلق و مقدار تقریبی



فصل سوم: توان و ریشه



۱۱۰ مفاهیم توان 

۱۲۷ کاربردهای توان 

۱۳۸ ریشه و رادیکال 

۱۴۸ اعمال بین رادیکال‌ها 

فصل چهارم: عبارتهای جبری



۱۵۸ چند جمله‌ای‌ها 

۱۶۴ اتحادهای جبری 

۱۷۸ روش‌های تجزیه عبارتهای جبری 

۱۸۵ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها 

فصل پنجم: خط و معادله‌های خطی



۱۹۴ نقطه در صفحه مختصات 

۲۰۱ خط در صفحه مختصات 

۲۱۹ فاصله و زاویه 

۲۲۵ دستگاه معادلات 

فصل ششم: عبارتهای گویا



۲۳۶ مفاهیم عبارتهای گویا 

۲۴۱ محاسبات عبارتهای گویا 

۲۵۶ تقسیم چند جمله‌ای‌ها 

۲۷۵ گویا کردن و ساده کردن عبارتهای رادیکالی 

۲۸۳

پاسخ‌نامه



فصل اوّل

مجموعه‌ها

زندگی از ابتدا تا انتهایش، بازی با مجموعه‌هاست؛ اوّل، عضو مجموعه نوزادان شهرمون میشیم، بعد عضویت در مجموعه‌های دیگه رو تجربه می‌کنیم. بعضی وقت‌ها در مجموعه‌ای هستیم که با بقیه مجموعه‌ها اشتراک داره و بعضی وقت‌ها در تفاضل دو مجموعه قرار می‌گیریم.

احتمالات زندگیمون همیشه برمی‌گرده به مجموعه‌هایی که توش عضو بودیم یا نبودیم. کاش احتمال عضویتمون به قول بی‌بی، تو «خیر بینیا» خودِ خودِ یک باشه.



تفاوت عضویت و زیرمجموعه بودن

۸

● یک مجموعه علاوه بر اینکه می‌تواند زیرمجموعه یک مجموعه دیگر باشد، می‌تواند عضو آن مجموعه نیز باشد (البته همیشه دو ویژگی را با هم ندارد و ممکن است فقط عضو آن مجموعه باشد).

مثال ۱: مجموعه $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه ۳ عضوی است و اعضای آن عبارت است از ۱، ۲ و $\{1, 2\}$. مجموعه‌ای مانند $\{1, 2\}$ هم عضو مجموعه A ، هم زیرمجموعه A است:

$$\{1, 2\} \in A \quad \{1, 2\} \subseteq A$$

حالا $B = \{5, 7, 3, \{1, 5\}\}$ را در نظر بگیرید. در اینجا نیز $\{1, 5\} \in B$ ، اما $\{1, 5\} \not\subseteq B$ ؛ چون $1 \in \{1, 5\}$ اما $1 \notin B$.

مثال ۲: اگر $D = \{x, y, \{x\}, \{x, y\}\}$ ، کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

$$\{x\} \in D \quad (۲)$$

$$\{x\} \subseteq D \quad (۱)$$

$$\{y\} \subseteq D \quad (۴)$$

$$\{y\} \in D \quad (۳)$$

پاسخ گزینه «۳» $y \in D$ و در نتیجه $\{y\} \subseteq D$ ؛ پس $\{y\} \notin D$. دلیل درستی گزینه ۲ با وجود تشابه‌اش با توضیح داده شده این است که $\{x\}$ یکی از ۴ عضو مجموعه D است و ما عیناً آن را در میان اعضای این مجموعه می‌بینیم.

مثال ۳: اگر $A = \{3, \{3\}, \{3, 3, 3\}, \{3, \{3\}\}\}$ ، چندتا از

عبارت‌های زیر درست است؟

الف) این مجموعه ۱۵ زیرمجموعه محض دارد.

ب) $\{3, \{3\}\} \subseteq A$

پ) $\{\{3\}\} \subseteq A$

ت) $\{3\} \notin A$

- | | |
|--------|----------|
| سه (۲) | چهار (۱) |
| یک (۴) | دو (۳) |

پاسخ گزینه «۳» چون $\{3, 3, 3\}$ همان $\{3\}$ است،

مجموعه A ، ۳ عضو دارد. در نتیجه ۸ زیرمجموعه دارد و تعداد زیرمجموعه‌های محض آن ۷ تا است؛ همچنین از آنجایی که $3 \in A$ ، $\{3\} \subseteq A$ است. در نتیجه عبارت‌های (الف) و (ت) درست نیست.

۹ مجموعه توانی

● مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A را مجموعه توانی A می‌نامند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱: اگر $A = \{2, 5\}$ ، زیرمجموعه‌های آن \emptyset ، $\{2\}$ ، $\{5\}$ و

$\{2, 5\}$ هستند و در نتیجه: $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$

● اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، مجموعه توانی آن 2^n

عضو و 2^{2^n} زیرمجموعه دارد.

مثال ۲: اگر $B = \{2, 3\}$ ، مجموعه $P(P(B))$ چند زیرمجموعه

دارد؟

$$2^{16} (1) \quad 2^8 (2) \quad 2^4 (3) \quad 2^2 (4)$$

پاسخ گزینه ۱: مجموعه B ، ۲ عضو و ۴ زیرمجموعه دارد؛ پس

$P(B)$ ، ۴ عضو و ۱۶ زیرمجموعه دارد. در نتیجه $P(P(B))$ ، ۱۶ عضو و 2^{16} زیرمجموعه دارد.

مجموعه مرجع، مجموعه متمم

۱۰

● مجموعه‌ای که دربرگیرنده همهٔ اعضاها و مجموعه‌های مورد مطالعه در سؤال باشد، مجموعه مرجع نام دارد. مجموعه مرجع را با M یا U نمایش می‌دهند.

مثال ۱: اگر مجموعه مرجع، عددهای طبیعی یک رقمی و

مجموعه A عددهای اول یک رقمی باشد، داریم:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

بنابراین: $A \subseteq M$

● متمم هر مجموعه، شامل عضوهایی است که در مجموعه مرجع وجود دارند، اما در آن مجموعه نیستند. متمم A را با A' نمایش می‌دهند و همان طور که گفته شد، شامل همهٔ عضوهای M است که عضو A نیستند؛ مثلاً در مثال بالا داریم:

$$A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

● به یاد داشته باشید:

$$M' = \emptyset \qquad \emptyset' = M \qquad (A')' = A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

مثال ۲: اگر M مجموعه عددهای زوج دورقمی و A مجموعه

مضرب‌های عدد ۳ باشد، کدام رابطه درست است؟

$$۶ \in A \quad (۱) \qquad ۳۵ \in A' \quad (۲)$$

$$۱۰۲ \notin A \quad (۳) \qquad n(A) > n(A') \quad (۴)$$

$$M = \{۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, \dots, ۹۸\}$$

$$A = \{۱۲, ۱۸, ۲۴, \dots, ۹۶\}$$

$$A' = \{۱۴, ۱۶, ۲۰, ۲۲, ۲۶, \dots, ۹۸\}$$

پاسخ گزینه «۳»

بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ درست نیستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k - ۳)$ عضوی، ۲۴۰ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k + ۱)$ عضوی است. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه k عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های چند عضوی آن برابر است؟

$$۲(۴) \qquad ۵(۳) \qquad ۱(۲) \qquad ۴(۱)$$

۱۴. اگر $A = \{-۱, \sqrt{۳}, ۲, ۷, \frac{۳}{۵}, ۲۰, ۳, ۱\}$ و $B = \{۲, ۱, \sqrt{۳}\}$ ، به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد به طوری که رابطه $B \subseteq X \subseteq A$ برقرار باشد؟

$$۶۴(۴) \qquad ۳۲(۳) \qquad ۱۶(۲) \qquad ۸(۱)$$

۱۵. چند زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه $C = \{2, 4, 6, 8, \dots, 26\}$ وجود دارد به طوری که عدد ۸ حتماً عضو آن باشد، اما ۱۲ و ۲۴ عضو آن نباشند؟

۴۵ (۱) ۱۶۵ (۲) ۵۵ (۳) ۲۶۰ (۴)

۱۶. در کدام یک از مجموعه‌های زیر، هر عضو، زیرمجموعه آن مجموعه نیز است؟

(۱) $\{\{\emptyset\}\}$ (۲) $\{5, \{5\}\}$
 (۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (۴) $\{5, \{5\}, \emptyset\}$

۱۷. چندتا از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر $A \subseteq B$ ، $B \in C$ ، آنگاه $A \in C$.

ب) اگر $x \in A$ ، $A \in B$ ، آنگاه $x \in B$.

پ) اگر $x \in A$ ، $A \not\subseteq B$ ، آنگاه $x \notin B$.

ت) اگر $A \not\subseteq B$ ، $B \not\subseteq C$ ، آنگاه $A \not\subseteq C$.

(۱) سه (۲) دو (۳) یک (۴) صفر

۱۸. اگر $A = \{\{2, 4, 6, 8\}\}$ ، کدام عبارت درست نیست؟

(۱) $4 \notin A$

(۲) $\{\{\{2, 4, 6, 8\}\}\} \subseteq P(A)$

(۳) $A \in P(A)$

(۴) $P(A)$ ، 2^{16} زیرمجموعه دارد.

۱۹. اگر $B \subseteq A$ و $B \subseteq A'$ ، آنگاه B کدام است؟


(۱) \emptyset (۲) A' (۳) A (۴) M

کاربردهای توان 

توان جبری و معادله توانی

۳۸ 


● گاهی اوقات متغیرها در توان ظاهر می‌شوند. در این صورت، بهتر است با استفاده از قواعد توان رسانی، عبارت را تا حد امکان باز کنید.

مثال ۱: اگر $2^n = 10$ ، حاصل 8^{n-1} کدام است؟ 

$$8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3} = \frac{2^{3n}}{2^3}$$

پاسخ

$$= \frac{(2^n)^3}{2^3} = \frac{1000}{8} = 125$$

مثال ۲: اگر $2^x = 3$ ، $3^y = 5$ و $5^z = 2$ ، آنگاه حاصل 

$3^{xyz} - xyz$ کدام است؟

۷ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

پاسخ گزینه «۳»

$$3^{xyz} - xyz = (3^y)^{xz} - xyz = 5^{xz} - xyz$$

$$= (5^z)^x - xyz = 2^x - xyz = 3 - xyz$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^x = 3 \\ 3^y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3^y = (2^x)^y \Rightarrow 5 = 2^{xy}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = 2^{xy} \\ 5^z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^z = (2^{xy})^z \Rightarrow 2 = 2^{xyz} \Rightarrow xyz = 1$$

$$\Rightarrow 3^{xyz} - xyz = 3 - 1 = 2$$

مثال ۳: اگر $2^x = 5$ و $3^y = 2$ ، آنگاه مقدار A کدام است؟

$$A = 3^{(2y+1)} \times 2^{(x-2)}$$

$$\frac{15}{2} \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$\frac{75}{2} \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳»

$$A = 3^{(2y+1)} \times 2^{(x-2)} = (3^y)^2 \times 3 \times 2^x \times 2^{-2}$$

$$= (2)^2 \times 3 \times 5 \times 2^{-2} = \frac{2^2 \times 3 \times 5}{2^2} = 15$$

● معادلاتی که در توانشان مجهول وجود داشته باشد، به معادلات توانی معروف اند. در اکثر این معادلات می توانید با یکی کردن پایه ها و مساوی قرار دادن توان ها، مجهول را پیدا کنید.

مثال ۴: در معادلات توانی زیر مجهول را بیابید.

الف) $25^x \times 5^{2x+4} = 5^{12}$

ب) $3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 99$

الف) $(5^2)^x \times 5^{2x+4} = 5^{12} \Rightarrow 5^{2x} \times 5^{2x+4} = 5^{12}$ **پاسخ**

$$\Rightarrow 5^{4x+4} = 5^{12} \Rightarrow 4x+4 = 12 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{ب) } 3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 3^x (3^2 + 3^1 - 1) = 99$$

$$\Rightarrow 3^x \times 11 = 99 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

● دو عدد توان دار با پایه‌های متمایز امکان ندارد با هم مساوی شوند؛ مگر آنکه توان هر دو صفر باشد؛ مانند: $6^0 = 7^0$

❖ **مثال ۵:** در معادله $2^{x+1} - 25^{y-2x} = 0$ مقدار y^x چند است؟

پاسخ

$$2^{x+1} = 5^{2y-4x} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 2y-4x = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$y^x = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{پس:}$$

❖ **مثال ۶:** معادله $10^x = x^{10}$ چند جواب صحیح دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ **گزینه ۱** «۱» این معادله فقط یک جواب صحیح دارد که عبارت است از: $x = 10$

❖ **مثال ۷:** تساوی $15^x = (17 \times 3)^x$ به ازای کدام مقدار x درست است؟

۱ (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ **گزینه ۴** «۴»

$$15^x = (17 \times 3)^x \Rightarrow (5 \times 3)^x = (17 \times 3)^x$$

$$\Rightarrow 5^x \times \cancel{3^x} = 17^x \times \cancel{3^x} \Rightarrow 5^x = 17^x \Rightarrow x = 0$$

فصل پنجم

خط و معادله‌های خطی

خط پیشرفت همون جاده‌ایه که همه دوست داریم توش باشیم. شیب این جاده کم نیست. هیچ‌کدوم نباید مبدأمون رو فراموش کنیم؛ فاصله عرضیمون از مبدأ خیلی مهمه. زندگی مثل جاده چالوسه؛ دیدید بعضی وقت‌ها وسط راه پیشیمون میشیم و می‌گیم برگردیم؟... مسافرها کمربندتون رو محکم ببندید.



نقطه در صفحه مختصات



نقطه میانی پاره خط

۶۷

● دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ را در نظر

بگیرید؛ مختصات نقطه M (نقطه میانی پاره خط AB) که دقیقاً وسط A و B قرار دارد برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix}$$

♦ **مثال ۱:** اگر $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \end{bmatrix}$ مختصات رأس‌های مقابل یک لوزی

باشند، مختصات محل تلاقی قطرهای این لوزی کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}^{(1)} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}^{(2)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}^{(3)} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}^{(4)}$$

پاسخ گزینه «۲»

می‌دانیم محل برخورد قطرهای لوزی، وسط هر یک از دو قطر

است؛ پس:

$$\begin{bmatrix} \frac{5 + (-11)}{2} \\ \frac{1 + (-3)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



● فاصله دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ که همان اندازه

پاره خط AB است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

● فاصله هر نقطه مانند $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از مبدأ برابر است با:

$$\overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

◆ **مثال ۲:** اگر A نقطه‌ای به طول $۶-$ روی محور طول‌ها و B

نقطه‌ای به عرض ۸ روی محور عرض‌ها باشد، فاصله A و B برابر است با:

$$11(4) \quad 15(3) \quad 10(2) \quad 12(1)$$

پاسخ گزینه «۲»

$$A = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(0 - (-6))^2 + (8 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

۶۸ قرینه نقطه نسبت به نقاط و خطوط خاص

● قرینه نقطه دلخواه $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به:

الف مبدأ مختصات برابر است با: $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \\ 13 - 3m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{13}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \leq m \leq \frac{13}{3}$$

عددهای صحیحی که در محدوده بالا صدق می‌کنند، عبارت‌اند از: ۲، ۳ و ۴.

● برای تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای کافی است هر یک از جملات چند جمله‌ای را بر یک جمله‌ای تقسیم کرده و سپس حاصل‌ها را با هم جمع کنیم. (قانون تفکیک یا جداسازی)

مثال ۳: اگر مساحت مستطیلی $a^2b^3 + a^3b^2$ و عرض آن a^2b باشد، طول مستطیل را حساب کنید.

پاسخ $\text{طول مستطیل} = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{عرض مستطیل}} = \frac{a^2b^3 + a^3b^2}{a^2b}$

$$= \frac{a^2b^3}{a^2b} + \frac{a^3b^2}{a^2b} = b^2 + ab$$

● برای تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌توانیم از عامل مشترک صورت فاکتور بگیریم، سپس با مخرج ساده کنیم؛ برای مثال در پاسخ سؤال بالا داریم:

$$\frac{a^2b^3 + a^3b^2}{a^2b} = \frac{\cancel{a^2} \cancel{b}^b (b+a)}{\cancel{a^2} \cancel{b}} = b(b+a) = b^2 + ab$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1}{\sqrt{x + y}} \times \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\cancel{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1} = \frac{\sqrt{x - y} \times \cancel{\sqrt{x + y}}}{\sqrt{x + y}}$$

$$= \sqrt{x - y}$$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۲۲۸. حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{25}}$ کدام است؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $\frac{3}{7}$ (۲) | $\frac{2}{7}$ (۱) |
| $\frac{2}{3}$ (۴) | $\frac{1}{2}$ (۳) |

۲۲۹. حاصل $\frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} + (1 + 4\sqrt{5})(1 - \sqrt{20})$ کدام است؟

- | | |
|---------|---------|
| -۴۴ (۲) | -۴۵ (۱) |
| -۳۴ (۴) | -۳۶ (۳) |

۲۳۰. حاصل عبارت $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - x^{-1}(x^2 + 1)$ برابر است با:

- | | |
|--------|--------|
| -۱ (۲) | -۲ (۱) |
| ۱ (۴) | ۲ (۳) |

۲۳۱. مقدار عددی عبارت $x^2 + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}$ به ازای

$x = 1999^{2000}$ چقدر است؟

$$\frac{1}{1999^{2000}} \quad (۲)$$

$$\frac{-1}{1999^{1000}} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{1999^{2000}} \quad (۴)$$

(۳) صفر

$$\frac{1}{1999^{1000}} \quad (۵)$$

۲۳۲. بیشترین مقدار عدد طبیعی n که به ازای آن رابطه زیر برقرار باشد، کدام است؟

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 15$$

۲۵۵ (۴)

۲۴۰ (۳)

۲۲۵ (۲)

۲۱۵ (۱)



پاسخ نامه



۱. گزینه «۲» چون مجموعه A سه عضوی است، $x - 3$ باید با یکی دیگر از اعضای مجموعه برابر باشد؛ پس:

$$x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \quad x - 3 = 9 \Rightarrow x = 12$$

$$x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1$$

۲. گزینه «۳» با استفاده از تساوی‌های $x^2 = x$ ، $y^2 = y$ ،

$$x = \{-1, 1, 0\} \quad x^2 = 1 \text{ و } y^2 = 1 \text{ داریم:}$$

بین این عددها، صفر قابل قبول نیست (در A و B قرار دهید و امتحان کنید)، اما به ازای $x = 1$ داریم:

$$A = B = \{1\}$$

$$A = B = \{-1, 1\}$$

و به ازای $x = -1$ داریم:

۳. گزینه «۳»

$$2^1 + 2, 2^1 + 4, 2^1 + 6, 2^1 + 8, \dots, \underbrace{2^1 + 2^1}_{2 \times 2^1 = 2^2}$$

بنابراین باید تعداد عددهای دنباله $2^1, 2, 4, 6, 8, \dots$ را بیابیم:

$$\text{تعداد} = \left(\frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} \right) + 1 \Rightarrow \left(\frac{2^1 - 2}{2} \right) + 1 = 2^9$$

۴. گزینه «۳» مجموعه ضرب‌های طبیعی عدد ۷ برابر است با:

$$A = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$$

$$\forall k_1 \in A \quad (k_1 \in \mathbb{N})$$

$$+ \forall k_2 \in A \quad (k_2 \in \mathbb{N})$$

$$\forall \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{N}} \in A$$

۵۴. گزینه «۳»

$$\begin{aligned}
 & 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) \\
 & - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
 & + \frac{1}{15} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{60 - 20 - 3}{60} = \frac{37}{60}
 \end{aligned}$$

۵۵. گزینه «۳»

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots\right) \\
 & + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{3}} + \dots \\
 & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right) = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 & = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

نکته مربوط به این سؤال در کلید ۳۹ آورده شده است.

۵۶. گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 M &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{47}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{50}\right) \\
 N &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50}\right)
 \end{aligned}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4} d \right)^2 = \frac{\pi}{8} d^2 \quad S_{\text{مربع}} = \frac{d^2}{2} = \frac{1}{2} d^2$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) d^2 = \left(\frac{4 - \pi}{8} \right) d^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضریب عددی} = \frac{4 - \pi}{8} \\ \text{درجه} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \frac{4 - \pi}{8} = \frac{20 - \pi}{8}$$

۱۴۶. گزینه «۴» برای به دست آوردن abc ، $x = 0$ را در تساوی جایگذاری می‌کنیم:

$$(0 - a)(0 - 2b)(0 - 3c) = 0^3 + 12d \Rightarrow (-a)(-2b)(-3c) = 12d$$

$$\Rightarrow -6abc = 12d \Rightarrow abc = -2d$$

۱۴۷. گزینه «۴»

$$a + b = \sqrt{7ab} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} a^2 + b^2 + 2ab = 7ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 5ab$$

$$\left(\frac{b+a}{b-a} \right)^2 = \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2} = \frac{\overbrace{a^2 + b^2 + 2ab}^{\Delta ab}}{\underbrace{a^2 + b^2}_{\Delta ab} - 2ab} = \frac{7ab}{3ab} = \frac{7}{3}$$

۱۴۸. گزینه «۲»

$$\underbrace{9x^2}_{a^2} + kx + \underbrace{4}_{b^2} \xrightarrow{\text{طبق اتحاد مربع دو جمله‌ای}} kx = \pm 2ab$$

\downarrow جذر $a=3x$ \downarrow جذر $b=2$

$$\Rightarrow kx = \pm 2(3x)(2) \Rightarrow k = \pm 12$$